Diccionario de Topología Lacaniana

Diccionario elemental de algunos de los términos relacionados con la topología empleados por Jacques Lacan

Abierto

Dado un *espacio topológico* X, su *topología* viene dada por una familia de subconjuntos de X llamados abiertos de X. La familia de abiertos debe satisfacer ciertos axiomas (ver: *espacio topológico*). Una manera de describir la noción de abierto consiste en decir que un conjunto es abierto si y sólo si es *entorno* de todos sus puntos. Por ejemplo, la *topología usual* del plano tiene como *abiertos básicos* a los discos (*bolas2–dimensionales*) abiertos, es decir, sin su *frontera*. Todo abierto del plano será, entonces, unión arbitraria de cierto número (finito o infinito) de discos abiertos.

Abierto básico

Supongamos que X es un *espacio topológico*. Una base de la topología de X consiste en una familia B de abiertos (llamados abiertos básicos) tales que cualquier abierto de X es unión de elementos de B.

Acotado

En la *topología usual* del *espacion–dimensional*, un conjunto es acotado cuando está contenido en una *bola* suficientemente grande. Equivalentemente, podemos decir que un conjunto es acotado si y sólo si no contiene *sucesiones divergentes*.

Adherencia

ver *clausura*.

Aplanamiento

ver *nudo aplanado*.

Arcoconexo

un *espacio topológico* X se dice arcoconexo o conexo por arcos si tiene la propiedad de que dos elementos cualesquiera de X pueden conectarse mediante una *curva* contenida en X. Resulta claro que todo conjunto *convexo* es arcoconexo, aunque la afirmación recíproca es obviamente falsa.

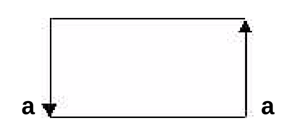
Asíntota

En geometría, dada una curva C que tiende a infinito (es decir, que no está contenida en ningún conjunto *acotado*), se dice que la recta L es una asíntota de C si la distancia entre L y C tiende a cero a medida que C tiende a infinito. Esto significa que L se acerca indefinidamente a C; la idea en *geometría proyectiva* es que L y C se cortan en un punto impropio (punto del infinito). Un ejemplo muy conocido es el de la *hipérbola*.

Banda de Möbius

Superficie no orientable estudiada por Listing en 1861, que se define en la *topología combinatoria* a partir de un rectángulo, mediante la *identificación* de uno de los lados con su opuesto, orientado en el sentido contrario:

ver figura(1)



La superficie obtenida es unilátera, y tiene algunas propiedades topológicas muy interesantes. Su borde es *homeomorfo* a una *circunferencia*.

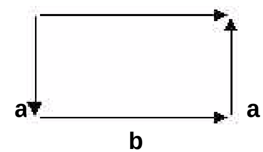
Bola n–dimensional

En el *espacion–dimensional* R^n, se define la bola (abierta) de radio r centrada en x al conjunto formado por aquellos puntos cuya distancia a x es menor que r, es decir: $B_r(x)$ = { y Î R^n / d(x,y) r}. Si bien esta definición es métrica (pues emplea alguna clase de distancia, si bien no necesariamente euclidiana), sirve para describir la *topología usual* de R^n. Asimismo se tiene la bola *cerrada*, que consiste en la *clausura* del conjunto anterior, es decir: $\overline{B_r(x)}$ = { y Î R^n / d(x,y) £ r}. La bola 1- dimensional es un *intervalo* (abierto o cerrado).

Botella de Klein

Superficie no orientable definida en la *topologíacombinatoria* a partir de un rectángulo, mediante la *identificación* de cada lado con su opuesto. A diferencia del *toro*, en uno de los pares de lados la identificación se efectúa en sentido contrario, como en una *banda de Möbius*:

b



Como ocurre con el *crosscap*, la botella de Klein no puede *sumergirse* en el espacio tridimensional, por lo cual su construcción con un trozo de goma es imposible si no se efectúa una línea de penetración. La botella de Klein puede pensarse como dos bandas de Möbius *pegadas* por el borde.

Cerrado

Se dice que un conjunto A es cerrado cuando su complemento A^c es *abierto*. Es decir, A es cerrado si y sólo si para todo x Ï A existe un *entorno* U de x tal que U Ç A = Æ . Equivalentemente, puede decirse que un conjunto es cerrado si y sólo si coincide con su *clausura*.

Circunferencia

En topología se llama circunferencia a cualquier *curva cerrada* que sea *homeomorfa* a la circunferencia usual de la geometría (es decir, la *esfera 1–dimensional*). Se la puede definir como el *espacio cociente* determinado al *identificar* los dos extremos de un segmento cerrado.

Clausura

Se llama clausura o adherencia de un conjunto A al menor conjunto *cerrado* que contiene a A. Notación: clausura de A = $\overline{A}$. Como se deduce de la definición, un conjunto es *cerrado* si y sólo si coincide con su clausura. En la *topología usual* es fácil demostrar que un punto x pertenece a la clausura de A si y sólo si existe alguna *sucesión* de elementos de A que *converge* a x.

Compacidad

Calidad de *compacto*.

Compacto

Bajo ciertas hipótesis, un *espacio topológico* X se dice compacto cuando todo *cubrimiento por abiertos* de X admite un *subcubrimiento* finito. En la *topología usual* de R^n, esta definición equivale a la siguiente, mucho más fácil de verificar: X es compacto si y sólo si es *cerrado* y *acotado*. También resulta sencillo probar que X es compacto si y sólo si toda *sucesión* en X admite alguna *subsucesión convergente* a un *punto* de X.

Conexo

Un *espacio topológico* X se dice conexo si no contiene ningún subconjunto *abierto* y *cerrado*, excepto Æ y X. Intuitivamente, un conjunto es conexo cuando no está compuesto por dos o más partes separadas. Una definición mucho más fácil de entender es la de conjunto *arcoconexo*. Sin embargo, se puede probar que ambas nociones no coinciden: todo conjunto arcoconexo es conexo, pero la recíproca es falsa. En la *topología usual*, todo *abierto* conexo es también arcoconexo.

Continuidad

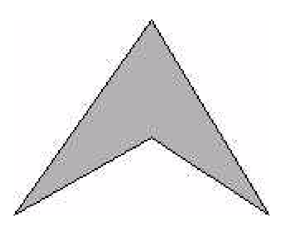
Ver *función continua*.

Convergencia

Ver *sucesión convergente*.

Convexo

Se dice que un conjunto A es convexo cuando dados dos puntos cualesquiera de A, el segmento que los une está íntegramente contenido en A. La convexidad es un *invariante* geométrico, pero no topológico: por ejemplo, en el plano un disco (*bola2–dimensional*) *cerrado* es convexo, aunque sea *homeomorfo* a esta otra región no convexa:

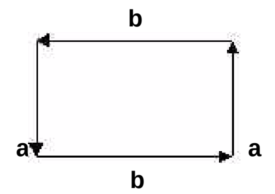


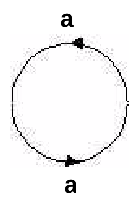
Cortar

La idea intuitiva de cortar corresponde a la operación de quitar puntos de cierto *espacio topológico*. Por ejemplo, se puede cortar a lo largo de una *circunferencia* a través del agujero de un *toro*, para obtener un tubo, equivalente a una porción de cilindro.

Crosscap

Superficie no orientable definida en la *topologíacombinatoria* a partir de cualquiera de los siguientesesquemasequivalentes:





Es fácil ver que la superficie determinada (llamada, en rigor: esfera provista de un crosscap) es unilátera, y no puede ser *sumergida* en el espacio tridimensional, por lo cual es preciso, para construirla, efectuar una línea de penetración. Puede demostrarse que toda *superficie cerrada* no orientable consiste en una esfera provista de cierto número de crosscaps. Es fácil ver que el crosscap es *homeomorfo* al *plano proyectivo*. El crosscap puede pensarse como una *banda de Möbius* y un disco *pegados* por el borde.

Cubrimiento

Sea X un *espacio topológico*, y A un subconjunto de X. Un cubrimiento de A es cualquier familia de conjuntos tal que su unión contiene a A. Si los conjuntos de dicha familia son *abiertos*, se tiene un cubrimiento por abiertos del conjunto A (ver también: *compacto*).

Curva

Dado un *espacio topológico* X, llamaremos curva a cualquier *función continua* c:I® X, en donde I es un *intervalo* no vacío de la recta (ver también: *curva cerrada*).

Curva cerrada

Sea X un *espacio topológico*. Una curva cerrada es una *función continua* c:I® X, en donde I es el *intervalo* cerrado [a,b] (a b), tal que c(a) = c(b). Es decir, el valor de c coincide en los extremos del intervalo, lo que significa intuitivamente que el punto de llegada de la curva coincide con el de partida. Por comodidad, siempre se puede suponer que I es el intervalo [0,1]

Entorno

Dado un punto x en un espacio topológico, se dice que el conjunto A es entorno de x si existe un *abierto* U tal que x Î U Ì A. En otras palabras, A es entorno de x si y sólo si x Î Aº

(*interior* de A).

Esfera

En el *espacion–dimensional* R^n, se define la esfera de radio r centrada en x al conjunto formado por aquellos puntos cuya distancia a x es igual a r, es decir: $S_r(x)$ = { y Î R^n / d(x,y) = r}. Se desprende de la definición que la esfera es la *frontera* de la *bolan–dimensional*. Es importante señalar que la dimensión de la esfera así definida es n–1: por ejemplo, la esfera usual del espacio tridimensional tiene dimensión 2. A la esfera de dimensión n de radio 1 centrada en el origen se la suele escribir S^n. Desde el punto de vista topológico, la esfera coincide con la superficie de un poliedro simple: así, la esfera bidimensional S^2 es equivalente a un cubo o un prisma. El caso unidimensional corresponde a la *circunferencia* S^1.

Se puede demostrar que la esfera n–dimensional se obtiene agregando un punto (punto del infinito) al espacio n–dimensional. A dicha operación se la conoce como compactificación del espacio n–dimensional.

ver figura(2)

Espacio cociente

Se llama así al espacio obtenido al considerar una relación de equivalencia (») en un *espacio topológico* X. La clase de equivalencia de un elemento x, que notaremos á xñ , es el conjunto de todos los elementos de X equivalentes a x, es decir: áxñ = {y Î X / y » x}. El conjunto de todas las clases de equivalencia, o espacio cociente X/» admite una *topología* llamada topología cociente, de modo tal que la *proyección* p:X® X/» que a cada punto de x le asigna su clase de equivalencia áxñ resulta una *función continua*. A modo de ejemplo, podemos tomar la esfera bidimensional S^2, e identificar a cada punto x con su antípoda –x. El espacio así obtenido es homeomorfo al *plano proyectivo* o *crosscap*.

Espacio n–dimensional

Se llama espacio n–dimensional usual al conjunto R^n, construido como el producto cartesiano R ´ ... ´ R (n veces), en donde R es el conjunto de los números reales. Los elementos de R^n se piensan como vectores de n coordenadas. El vector nulo es aquel cuyas coordenadas son todas 0, y se lo llama origen o centro de coordenadas. Por ejemplo, el plano R^2 es el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) en donde sus dos coordenadas x, y son números reales cualesquiera, y su origen es el vector (0,0). A este espacio se le suele asignar una topología, conocida como *topología usual* de R^n.

Espacio topológico

Se llama espacio topológico a un conjunto X provisto de una topología, es decir, una familia de subconjuntos de X, llamados *abiertos*, que satisfacen los siguientes axiomas:

1. Æ y X son conjuntos abiertos
2. La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto
3. La unión de cualquier número de conjuntos abiertos es un conjunto abierto

Se desprende de la definición que en cualquier espacio topológico X los conjuntos Æ y X son a la vez abiertos y *cerrados* (ver también: *topología usual*)

Frontera

La frontera de un conjunto A se define como el conjunto de puntos pertenecientes a la *clausura* de A, pero no a su *interior*, es decir: Fr(A) = $\overline{A}$ - Aº. Por ejemplo, la frontera de un disco (*bola 2-dimensional*) en el plano es una *circunferencia*.

Función continua

Dados dos espacios topológicos X e Y, la función f:X® Y se dice continua en un punto *a* Î X si dado un *entorno* V del punto f(*a*) Î Y, existe un entorno U de *a* tal que f(U) Ì V, es decir, f(x) Î V para todo x Î U. Esto puede expresarse mediante la noción de *límite*: f es continua en *a* si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

En la *topología usual*, la noción de continuidad en *a* equivale a la propiedad de que si $\{x_n\}$ es cualquier *sucesión* en X que *converge* a *a*, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a f(*a*). Intuitivamente, podemos decir: cuanto más se acerca x_n a *a*, más se acerca $f(x_n)$ a f(*a*). f se dice continua cuando es continua en todos sus puntos. Equivalentemente, f es continua si y sólo si la imagen inversa de un *abierto* cualquiera es un conjunto abierto.

Geometría proyectiva

Rama de la matemática originada a partir de consideraciones relativas al estudio de la perspectiva. Se trata de una geometría menos cuantitativa que la común, aunque más que la *topología*. En la geometría proyectiva, dos figuras son equivalentes cuando se puede pasar de una a la otra por medio de una transformación proyectiva. A grandes rasgos, ésto significa que una es una perspectiva de la otra (ver también: *plano proyectivo*).

Geometrías no euclidianas

Se suele conocer con este nombre a las geometrías que satisfacen todos los postulados de Euclides, excepto el quinto, denominado de las paralelas. La versión más conocida de este postulado dice quepor un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta. La negación de este postulado permite su reemplazo por cualquiera de estos otros:

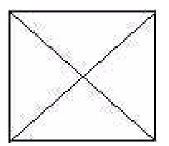
1. Por un punto exterior a una recta no se puede trazar ninguna paralela a dicha recta
2. Por un punto exterior a una recta se puede trazar más de una paralela a dicha recta

El primer caso (geometría elíptica), fue desarrollado por Riemann, y admite una interpretación sencilla, tomando como plano a la superficie de la esfera, y considerando como rectas a los círculos máximos (geodésicas). En rigor, para que se cumplan los demás postulados de Euclides, es preciso identificar los puntos antipódicos de la esfera, considerándolos como un único punto.

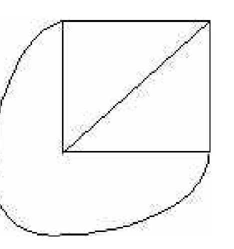
El segundo caso (geometría hiperbólica) corresponde a la geometría de Gauss, Bolyai y Lovachevski. Un modelo posible consiste en tomar el interior de una elipse, y definir allí una noción de distancia. Las rectas de este modelo serán las rectas del plano, pero limitándolas a la porción que atraviesa el interior de la elipse. Es evidente que dos de estos segmentos pueden no cortarse, sin ser por ello paralelos en el sentido euclidiano.

Grafo

Un grafo es una terna G = (V,A,j), en donde V y A son conjuntos finitos, y j es una aplicación que hace corresponder a cada elemento de A un par de elementos de V. Los elementos de V y de A se llaman, respectivamente, vértices y aristas de G, y j asocia entonces a cada arista con sus dos vértices. Esta definición da lugar a una representación gráfica, en donde cada vértice es un punto del plano, y cada arista es una línea que une a sus dos vértices. Si el dibujo puede efectuarse sin que haya superposición de líneas, se dice que G es un grafo plano. Por ejemplo, el siguiente es un grafo plano:



puesto que es equivalente a este otro:

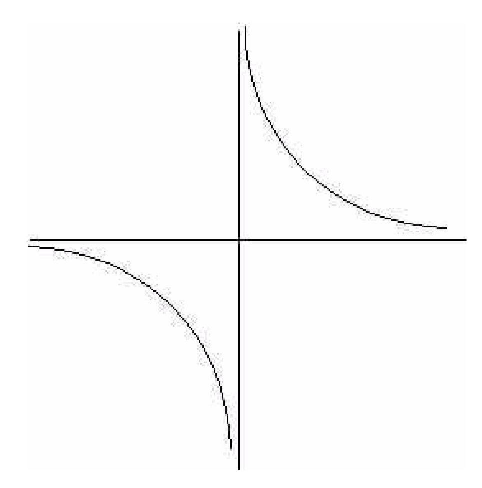


Grupo fundamental

Dado un *espacio topológico* X, se puede formar el conjunto de todos los *lazos* en X que salen de un cierto punto, considerando como equivalentes a dos lazos que se puedan superponer mediante una *homotopía* (es decir, tales que se pueda deformar a uno de ellos en forma continua hasta obtener el otro). A dicho conjunto se le asigna una estructura (algebraica) de grupo, lo que determina el llamado grupo fundamental de X. Se trata de un *invariante topológico* muy útil. Por ejemplo, el grupo fundamental de una *circunferencia* es Z, el conjunto de los números enteros (Z = {..., - 3, - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, ...}), hecho que resulta claro pues todo lazo cerrado sobre la circunferencia está determinado unívocamente por la cantidad de vueltas, y el sentido en que se las recorre. El grupo fundamental de un *toro* es Z ´ Z, pues en este caso deben tenerse en cuenta las vueltas dadas alrededor del agujero, y también a través del mismo. Este resultado es, claro está, coherente con el hecho de que el toro puede pensarse como el producto cartesiano de dos circunferencias (ver: *toro*)

Hipérbola

La hipérbola es una curva muy conocida, clasificada entre las cónicas, llamadas así pues provienen de efectuar distintas secciones de un cono. En el caso de la hipérbola, se trata de intersecar al cono con un plano vertical que no pase por su vértice, quedando determinada la siguiente figura:



Las líneas rectas son las *asíntotas* de la hipérbola. En la *geometría proyectiva* todas las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) son equivalentes, pues cada una puede pensarse como cierta perspectiva de las otras.

Homeomorfismo

Se llama homeomorfismo entre dos *espacios topológicos* X e Y a una función f:X® Y que resulte biunívoca y bicontinua, es decir:

f es uno a uno (biunívoca), lo que significa que para cada elemento x Î X existe un único y Î Y tal que f(x) = y y viceversa. Esto permite definir la función inversa, f- 1:Y® X

f y f- 1 son *continuas* (f es bicontinua)

La noción de homeomorfismo responde a la idea intuitiva de deformación, y determina cierta clase de equivalencia: dos espacios homeomorfos tienen las mismas propiedades topológicas.

Homología

Invariante topológico que asocia a cada *espacio topológico* una estructura algebraica llamada complejo. Como invariante, tiene mayor precisión que el *grupo fundamental*, aunque su definición y cálculo resultan más complicados.

Homotopía

Dados dos espacios topológicos X e Y, una homotopía es una función continua h:X ´ [a,b] ® Y, en donde [a,b] es un *intervalo cerrado*. Por comodidad, siempre supondremos que [a,b] es el intervalo [0,1] . Se puede interpretar intuitivamente la noción de homotopía pensando al [0,1] como un intervalo de tiempo, y en consecuencia h representa una cierta deformación a partir del instante inicial t = 0, hasta llegar a t = 1 pasando por cada instante t fijo.

Identificar

Operación topológica que responde a la noción intuitiva de pegar. Consiste en definir alguna relación de equivalencia entre puntos de un *espacio topológico* X, lo que permite definir el *espacio cociente*. Por ejemplo, si se identifican uno a uno los puntos de dos lados opuestos de un rectángulo, se obtiene una supercie tubular similar a un cinturón, o una

porción de cilindro. En cambio, si esta identificación se efectúa orientando a los dos lados en sentidos opuestos, se obtiene una *Banda de Möbius*.

Interior

Dado un conjunto A, si llama interior de A al mayor *abierto* contenido en A. Notación: Aº = interior de A . Por definición, es claro que un conjunto es abierto si y sólo si coincide con su interior. El interior de A se puede pensar como el conjunto de puntos de A que no pertenecen a su *frontera*, es decir: Aº = A - Fr(A).

Intervalo

Dados dos números reales a b, se llama intervalo entre a y b al conjunto de puntos de la *recta* contenidos entre a y b. Caben cuatro posibilidades, según se incluya o no a cada uno de los extremos:

1. (a,b) = { x Î R / a x b } (intervalo *abierto*)
2. [a,b) = { x Î R / a £ x b } (intervalo semiabierto)
3. (a,b] = { x Î R / a x £ b } (intervalo semiabierto)
4. [a,b] = { x Î R / a £ x £ b } (intervalo *cerrado*)

También se definen los siguientes intervalos no *acotados*: (a,+¥), [a,+¥), (–¥,b), (–¥ ,b] . Por ejemplo, (a,+¥) = { x Î R / x a }. Los símbolos +¥ y –¥ responden únicamente a una mayor simplicidad en la escritura, ya que no se trata de números reales. Por esa razón, todo intervalo no acotado es abierto en su extremo infinito. Obviamente, el intervalo (–¥ ,+¥) equivale a toda la recta R. Es fácil ver que cualquier intervalo abierto es *homeomorfo* a R.

Invariante

Se llama invariante topológico a aquellas propiedades de un espacio topológico que permanecen cuando se le aplica un homeomorfismo. Algunos invariantes muy conocidos son la *compacidad*, la *conexión*, el *grupo fundamental*, la *homología* , etc. En general, cada teoría matemática tiene sus propios invariantes: así, los invariantes geométricos son las propiedades que conserva una figura cuando se le aplica una rotación o una traslación (movimientosrígidos).

Lazo

Se llama lazo a cualquier *curva cerrada* definida en un *espacio topológico*. Por medio de cierta equivalencia entre lazos originados en cierto punto prefijado, se puede definir el *grupo fundamental* de dicho espacio.

Lazo reducible

Un *lazo* c:I® X se dice reducible si existe una *homotopía* h:I ´ [0,1] ® X tal que h(t,0) = c(t) y h(t,1) = x, en donde x es cierto punto de X. Intuitivamente, esto significa que se puede deformar al lazo c en forma continua hasta obtener un punto. Por ejemplo, cualquier lazo trazado en el plano es reducible, aunque no lo será un lazo trazado en torno al agujero de

un *toro*.

Límite

Dada una *sucesión* $\{x_n\}$, se dice que x es el límite de $\{x_n\}$ cuando, intuitivamente, a valores mayores de n corresponden valores de x_n cada vez más cercanos a x. Cuando x es un número, ésto significa que la distancia entre x_n y x tiende a cero cuando n tiende a infinito. Pero también puede pensarse que x es infinito: en ese caso se dice que la sucesión $\{x_n\}$ tiende a infinito o diverge, cuando el valor de x_n (o bien: su distancia al origen) crece indefinidamente. En el caso de una función, se dice que L es el límite de f cuando x tiende a *a*, y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

cuando, intuitivamente, para valores de x cada vez más cercanos al valor *a*, el valor de f(x) resulta cada vez más cercano a L. Si el valor de L coincide con el de f(*a*), f es una *función continua* en *a*. Nuevamente, tiene sentido considerar el caso L = ¥ , o incluso *a* = ¥ .

Nudo

Se llama nudo de n componentes a la unión disjunta de n *circunferencias*, *sumergidas* en el *espaciotridimensional*. Esta idea responde a la noción intuitiva de un nudo como cierto número de redondeles de cuerda, aunque no es del todo exacta, dado que ciertos nudos nunca podrían efectuarse con cuerdas. Existen diversos *invariantes* que permiten estudiar distintas propiedades de los nudos, y determinar, en muchos casos, cuándo dos nudos son equivalentes, es decir: cuándo es posible, mediante una *homotopía*, pasar de un nudo a otro, sin cortar ninguna de las circunferencias (ver también: *nudoborromeo, nudo aplanado*).

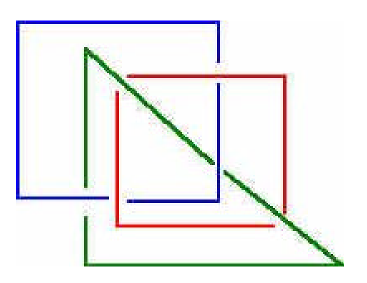
ver figura(3)

Nudo aplanado

Se llama aplanamiento de un *nudo* a un esquema dibujado en el plano que permite estudiar, mediante reglas combinatorias, algunas propiedades de los nudos. El aplanamiento puede pensarse como una vista del nudo desde cierta perspectiva; por eso, es preciso disponer de ciertas reglas que digan en qué casos dos esquemas distintos corresponden a aplanamientos de un mismo nudo. Una de las herramientas más comunes para trabajar con nudos aplanados es el grupo de movimientos conocido como movimientosdeReidemeister.

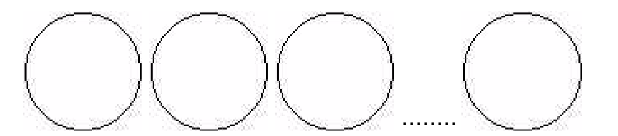
Nudo borromeo

Un *nudo* de n componentes (n ³ 3) es borromeo si tiene la propiedad de que al eliminar cualquiera de sus componentes se obtiene un *nudo trivial*. Por esta razón se lo suele denominar nudo cuasi- trivial. Es fácil ver que existen nudos borromeos para cualquier valor n ³ 3.



Nudo trivial

Se llama nudo trivial de n componentes al *nudo* compuesto por n circunferencias separadas, en la siguiente forma:



Ocho interior

Curva cerrada definida en el *crosscap* a partir de cualquier *punto* y atravesando dos veces el horizonte, es decir, la recta de puntos impropios (ver: *plano proyectivo*). Es fácil ver que esta curva recorre al crosscap por dentro y por fuera lo que muestra que, en realidad, se trata de una *superficie* unilátera. Si se *corta* la superficie a lo largo del ocho interior, se obtienen dos partes separadas: un disco y una *banda de Möbius*.

Orientable

Intuitivamente, una *superficie* se dice orientable cuando es posible trazar, alrededor de cada uno de sus *puntos* una *circunferencia*, recorrida en cierto sentido, de modo tal que circunferencias con centros muy próximos tengan el mismo sentido. Así es fácil ver que el *plano* o la *esfera* son orientables, mientras que la *banda de Möbius* no lo es.

Pegar

Ver *identificar*

Plano euclidiano

Se llama plano euclidiano al *espacio bidimensional* R^2, dotado de la distancia entre dos puntos definida en forma usual. Esta distancia, o métrica, se distingue de otras por la validez del teorema de Pitágoras.

Plano proyectivo

Espacio definido en *geometría proyectiva*, de acuerdo con la idea intuitiva de agregar al *plano euclidiano* un horizonte, de modo tal que dos rectas paralelas determinen un (único) punto. Las rectas resultan entonces cerradas, es decir, *homeomorfas* a una *circunferencia*, hecho relacionado además con la propiedad que tiene el plano proyectivo de ser *compacto*. Al horizonte, que también es una recta, se lo suele llamar recta impropia, pues está compuesta de puntos impropios, también llamados puntos del infinito.

En la *geometría proyectiva* los conceptos de punto y recta son duales, puesto que pueden intercambiarse. Por ejemplo, el enunciado: Dos puntos determinan una única recta se transforma en su dual Dos rectas determinan un único punto, que también es válido, aunque no lo es en la geometría euclidiana.

Poliedro topológico

Generalización de la noción geométrica de poliedro. Consiste en un sistema formado por un número finito de *polígonos topológicos* sujetos a ciertas condiciones, entre las cuales se tiene, por ejemplo, que dos polígonos distintos no tienen puntos interiores comunes, que los lados de los polígonos del sistema coinciden dos a dos, etc.

Polígono topológico

Generalización de la noción geométrica de polígono. Consiste en tomar cierto número finito n 1 de puntos en una *circunferencia*. Los arcos así determinados serán los lados, y los puntos se llamarán vértices del polígono. El polígono estará formado entonces, por el conjunto de lados y la región interior a la circunferencia.

Problema de los cuatro colores

Famosa conjetura formulada por de Morgan a mediados del siglo XIX, que dice que dado un mapa geográfico plano cualquiera, son suficientes cuatro colores para pintarlo de modo tal que dos zonas con frontera común tengan colores diferentes. Es inmediato ver que tres colores no siempre bastan, y poco tiempo después de planteado el problema se demostró que cinco colores alcanzan siempre. Sin embargo, la prueba definitiva de que son suficientes cuatro colores recién pudo efectuarse en 1976, con la ayuda de computadoras.

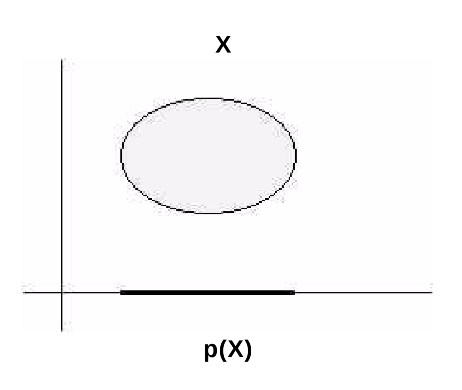
Problema de los puentes de Königsberg

Célebre acertijo que tiene su origen en los siete puentes que atraviesan el río de la ciudad de Königsberg, uniendo entre sí a las dos costas, y a dos pequeñas islas. El problema, que consiste en la pregunta de si es posible recorrer todos los puentes una (y sólo una)

vez, fue resuelto en forma muy simple por Euler, dando origen a la teoría de *grafos*.

Proyección

Dada una relación de equivalencia en un conjunto cualquiera, se llama proyección a aquella función que asigna a cada elemento x su clase de equivalencia, es decir, el conjunto de todos los puntos que son equivalentes a x. Por ejemplo, si X es un subconjunto del plano, podemos proyectarlo sobre el eje de las abscisas, considerando equivalentes a todos los puntos de X que tienen el mismo valor en su primera coordenada.



Punto

En *topología* se denomina punto a cualquier elemento de un *espacio topológico* X, más allá de la idea intuitiva de punto que da Euclides en sus Elementos, que dice que punto es aquello que no tiene partes. Por ejemplo, en el *plano proyectivo* los puntos son, en realidad, rectas del *espaciotridimensional*.

Punto impropio

Se llama así a cada uno de los puntos del infinito que se agregan al *espacio n-dimensional* para construir el llamado espacio proyectivo. Por ejemplo, si al plano común se le agrega una recta de puntos impropios, se obtiene el *plano proyectivo*, topológicamente equivalente al *crosscap*.

Recta

Llamaremos recta al *espacio unidimensional* R, o a cualquier *espacio topológico* que sea homeomorfo a R.

Retracción

Sea X un *espacio topológico*, y A un subconjunto de X con la *topología inducida*. Se llama retracción a una *función continua* f:X® A tal que f(x) = x para todo x Î A. Por ejemplo, se

puede definir fácilmente una retracción de R^2 - {0} (plano sin el origen) en cualquier *circunferencia* centrada en el 0. Sin embargo, se puede demostrar que no existen retracciones todo el plano en una circunferencia ni, en general, del *espacion–dimensional* en una *esferan–dimensional*. Este hecho es el que permite demostrar el *teorema de punto fijo* de Brouwer.

Subcubrimiento

Dado un *cubrimiento* C de un conjunto A, un subcubrimiento de C es cualquier subfamilia de C que también cubre a A.

Subsucesión

Dada una *sucesión* $\{x_n\}$, una subsucesión es un subconjunto infinito de $\{x_n\}$, de la forma $\{x_{nj}\}$, en donde n_1 n_2 n_3 ...

Por ejemplo, si $\{x_n\}$ es la sucesión de números naturales, podemos definir la subsucesión de los números pares, la de los impares, la de los números primos, la de los cuadrados perfectos, etc.

Sucesión

Dado un conjunto cualquiera X, una sucesión en X es una función de N (conjunto de números naturales) en X. Habitualmente, una sucesión de elementos de X se escribe en la forma $\{x_n\}_{n \in N}$. Es decir, la sucesión se piensa como un conjunto ordenado cuyos elementos son $x_1, \ldots, x_n \ldots$

El elemento x_n se denomina n-ésimo término de la sucesión.

Sucesión convergente

En un *espacio topológico* X se dice que una sucesión $\{x_n\}$ converge a un valor $x \in X$ cuando x es el *límite* de $\{x_n\}$, es decir, intuitivamente, cuando los términos de la sucesión se acercan cada vez más a x a medida que n va tomando valores cada vez mayores. Por ejemplo, es fácil probar que la sucesión

1, 1/2, 1/3, 1/4, ...

converge al valor 0.

Sucesión divergente

En el *espacio n-dimensional*, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ diverge cuando la distancia de x_n al origen (o centro de coordenadas) tiende a infinito, es decir, cuando x_n se aleja

indefinidamente del origen. Un ejemplo de sucesión divergente es la sucesión de números naturales

1, 2, 3, 4,...

Es importante observar que existen sucesiones que no son *convergentes* ni divergentes, como la sucesión oscilante:

1,- 1, 1, - 1, ...

Sumergir

Sean X, Y *espacios topológicos*. Se dice que X se sumerge en Y cuando puede definirse una *función continua* f:X® Y de modo tal que f resulte un *homeomorfismo* entre X y su imagen f(X), considerado con la *topología inducida* por Y. Intuitivamente, la idea es que X se puede meter adentro de Y, sin cortes o desgarraduras, preservando todas sus propiedades topológicas. Por ejemplo, el *crosscap* no puede sumergirse en el *espacio tridimensional*.

Superficie

Bajo ciertas hipótesis, se dice que un *espacio topológico* X es una superficie (variedad topológica de dimensión 2) cuando todo punto de X tiene un *entorno* que es *homeomorfo* a un *abierto* del plano R^2 con la *topología usual*. Intuitivamente puede pensarse que una superficie resulta de pegar con cuidado cierto número (finito o infinito) de discos abiertos. En rigor, se llama superficie únicamente a aquellas variedades topológicas de dimensión 2 que están *sumergidas* en el *espaciotridimensional*.

Superficie cerrada

En la *topologíacombinatoria* se llama superficie cerrada a todo conjunto que sea *homeomorfo* a un *poliedro topológico*.

Superficie de revolución

Se llama superficie de revolución a la *superficie* determinada, bajo ciertas condiciones, por la rotación de una *curva* en torno a cierto eje fijo. Por ejemplo, el *toro* y la *esfera* son superficies de revolución.

Teoremas de Punto fijo

Se conoce con este nombre a diversos teoremas que aseguran, bajo diferentes hipótesis, la existencia de al menos un punto fijo en cierta función f, es decir, un elemento x tal que

f(x) = x. Estos teoremas tienen aplicaciones en variados campos. Uno de los más conocidos se debe al holandés L.E.J.Brouwer, que dice que toda *función continua* de una *bola n–dimensional cerrada* en sí misma tiene al menos un punto fijo. Un resultado similar, muy interesante, dice que toda transformación continua de la *esfera* usual en sí misma (y en general, de cualquier esfera de dimensión par) tiene al menos un punto fijo o bien un punto antipodal, es decir, tal que el valor de f(x) resulta ser el de la antípoda de x.

Topología

1) Rama de la matemática que estudia las propiedades del espacio que son *invariantes* por *homeomorfismos*. Se trata de propiedades no métricas, es decir, de propiedades cualitativas, y no cuantitativas, lo que la distingue de la geometría común. Se la suele denominar geometría débil o geometría del caucho. Por ejemplo, una circunferencia es topológicamente equivalente a un cuadrado, por más que sus propiedades métricas sean diferentes

2) Una topología en un conjunto X es una familia de subconjuntos de X que satisface ciertos axiomas (ver *espacio topológico*).

Topología combinatoria

Rama de la *topología* que reduce el estudio de *curvas* y *superficies* a ciertos esquemas determinados por polígonos curvilíneos, evitando de esta forma pensarlas como conjuntos de *puntos*, como lo hace la topología conjuntista. El tratamiento combinatorio es más cercano al álgebra, y reduce el concepto de *homeomorfismo* a unas pocas reglas que permiten decidir cuándo dos esquemas combinatorios son equivalentes.

Topología inducida

Dado un subconjunto A de un *espacio topológico* X, se llama topología inducida a la topología definida en A que toma como abiertos a todos los conjuntos de la forma U Ç A, en donde U es un abierto de X. En estas condiciones, se dice que A es un subespacio de X.

Topología usual

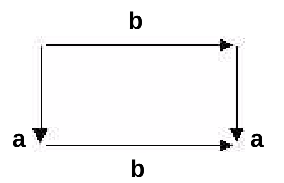
La topología usual del *espacio n–dimensional* (R^n) tiene como *abiertos básicos* a las *bolas n–dimensionales (abiertas)*. Es decir, un conjunto de R^n es abierto si y sólo si es unión de cierto número de bolas abiertas. Equivalentemente, diremos que A es abierto si y sólo si para todo punto x Î A existe una bola B contenida en A tal que x Î B (A es *entorno* de x).

Toro

Se llama así a la *superficie de revolución* engendrada por la rotación de una circunferencia en torno a un eje que no la toque en ninguno de sus puntos. Si bien esta definición es geométrica, las propiedades topológicas del toro son de gran importancia. En especial, la

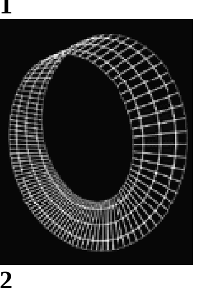
propiedad de tener un asa, o agujero, que determina que existan en el toro *lazos no reducibles*. Un importante teorema de la *topología combinatoria* asegura que toda *superficie cerrada* y *orientable* es un toro con n agujeros. El caso n = 0 corresponde obviamente a la *esfera*, si se la piensa como un toro sin agujeros, y el caso n = 1 es el toro usual. Si bien la definición habitual del toro lo presenta como una superficie *sumergida* en el espacio tridimensional, es fácil ver que es *homeomorfo* al producto cartesiano de dos *circunferencias*, sumergido en R^4 (espacio cuatridimensional). Es decir, la definición topológica del toro es: $T^2 = S^1$ ´ S^1. Esto permite generalizar, y definir al toro n–dimensional como el producto cartesiano de n circunferencias, es decir: $T^n = S^1$ ´ ... ´ S^1.

En la *topologíacombinatoria,* el toro bidimensional se define *identificando* dos a dos los lados opuestos de un rectángulo, como muestra la figura:(4)

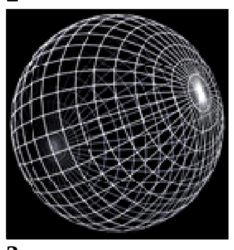


Notas finales

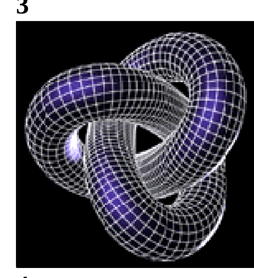
1



2



3



4

